

Introduction à la théorie spectrale en dimension infinie

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Christophe Hazard

En dimension finie, on sait qu'une matrice hermitienne est diagonalisable dans une base constituée de vecteurs propres : ce résultat fondamental est extrêmement utile en pratique puisqu'il réduit l'action de la matrice à de simples multiplications dans les directions propres. Qu'en est-il en dimension infinie ? Ce résultat fondamental reste valable, mais la structure du spectre peut être considérablement modifiée et fait intervenir de nouveaux objets mathématiques. L'objectif de ce cours est de donner un aperçu de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints, dans un espace de Hilbert de dimension infinie. Nous montrerons que le spectre d'un opérateur autoadjoint peut comporter à la fois une partie discrète, formée de valeurs propres et une partie dite essentielle, spécifique à la dimension infinie. Nous verrons que le Principe du Min-Max permet d'accéder à des informations qualitatives et quantitatives très précises sur les valeurs propres. Nous illustrerons ces concepts sur quelques exemples fondamentaux (séries de Fourier, vibrations d'un système mécanique, mécanique quantique).

Contenu du cours

- Rappels sur la dimension finie : diagonalisation d'une matrice hermitienne, formules de min-max.
- Espaces de Hilbert, opérateurs bornés, adjoint, opérateurs autoadjoints bornés et non-bornés.
- Notion de spectre en dimension infinie, caractérisation du spectre d'un opérateur autoadjoint, spectre essentiel et spectre discret, suite singulière.
- Opérateurs autoadjoints compacts : définition et diagonalisation. Théorie des séries de Fourier dans L^2 .
- Principe du Min-Max dans le cas général. Application à l'opérateur de Schrödinger en mécanique quantique.

Prérequis

Aucun prérequis n'est demandé si ce n'est quelques notions élémentaires d'algèbre linéaire. L'objectif du cours est de donner une présentation accessible (sans rentrer dans les détails mathématiques) des outils fondamentaux de la théorie spectrale en dimension infinie qui interviennent dans de nombreux champs de la mécanique.