

# Comment réduire les vibrations [Retour](#)

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie

Optimalité sans contrainte

La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

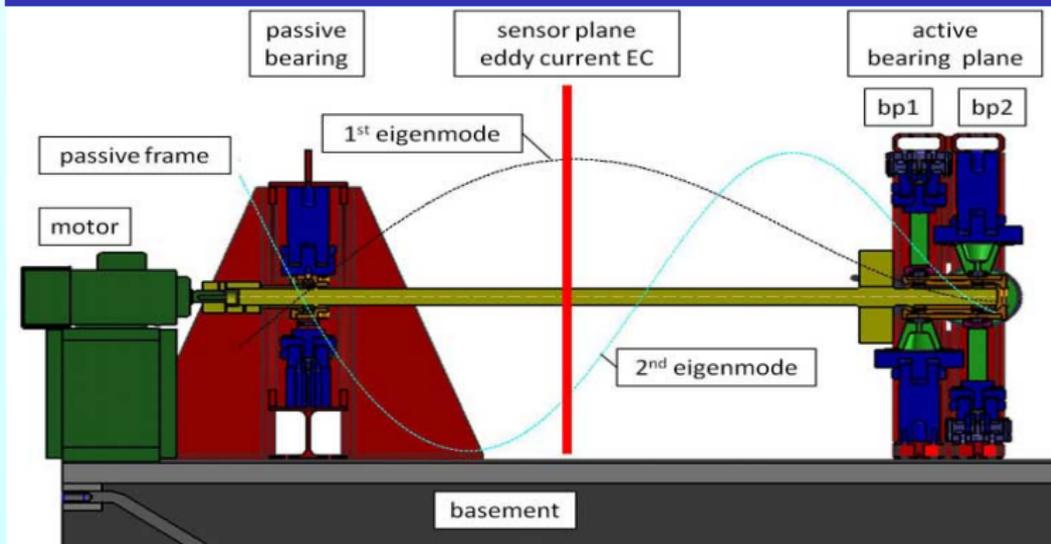
A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle couplé fluides-structures

QCM 3



## Cours 3: Contrôle des vibrations



## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie  
L'optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$   
A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

## *PLAN DU COURS 3*

- 1 **Position du problème**
  - Cas de la dimension finie
  - L'optimalité sans contrainte
- 2 **La méthode des développements asymptotiques *a priori***
  - Calcul de  $u^0$  dans le cas contrôlable
  - Cas avec contraintes
- 3 **Cas des milieux continus**
  - Cas d'une membrane
  - Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$
  - A propos des pastilles piezo
  - Un problème de contrôle couplé fluides-structures
- 4 **QCM 3**

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

### Le cadre du contrôle optimal

On considère le système différentiel dans  $\mathbb{R}^N$  ;  
 $u \in L^2(]0, T[; \mathbb{R}^J)$ ,  $J \leq N$  est le contrôle :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F + Bu, \quad X(0) = X_0 \quad \dot{X}(0) = X_1.$$

On souhaite (par exemple) ramener l'état  $X$  au repos à l'instant  $T$  et avec un coût limité. Le problème de contrôle optimal consiste à :

$$\min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \frac{1}{2} \left[ (DX(T) \cdot X(T))_N + (E\dot{X}(T) \cdot \dot{X}(T))_N + \varepsilon \int_0^T |v(t)|^2 dt \right] = J^\varepsilon(v).$$

L'ensemble des contrôles admissibles noté (on a  $c_j = \infty$  cas sans contraintes) :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v = \{v_i\} \in L^2(]0, T[; \mathbb{R}^J), |v_i| \leq c_i\}$$

$M, D, E$  matrices sym.  $>0$  et  $F \in \mathbb{R}^N$ ,  $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^J; \mathbb{R}^N)$ .

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle couplé fluides-structures

QCM 3

### Calcul du gradient

La fonctionnelle à minimiser est strictement convexe et de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
On note :

$$X^1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{X(u + \eta v) - X(u)}{\eta}.$$

$X^1$  est indépendant de  $u$  et solution de :

$$M\ddot{X}^1 + C\dot{X}^1 + KX^1 = Bv, \quad X^1(0) = 0, \quad \dot{X}^1(0) = 0.$$

### Utilisation de l'état adjoint

Soit  $P \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{R}^N)$  solution de :  $M\ddot{P} - {}^tC\dot{P} + {}^tKP = 0$ . On a :

$$([M\dot{X}^1(T) + CX^1(T)].P(T))_N - (MX^1(T).\dot{P}(T))_N = \int_0^T (Bv.P)_N,$$

Si  $MP(T) = E\dot{X}(T)$ ,  $-M\dot{P}(T) + {}^tCP(T) = DX(T) \Rightarrow$

$$G^\varepsilon(u)(v) = \int_0^T ([{}^tBP + \varepsilon u].v)_J, \quad G^\varepsilon(u) = {}^tBP + \varepsilon u \xrightarrow{\text{optimalité}} G^\varepsilon(u) = 0!$$

# La méthode des développements asymptotiques

Retour

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle couplé fluides-structures

QCM 3

On introduit formellement un D.A. *a priori*

La résolution du pb de contrôle optimal ( $\varepsilon \neq 0$ ) est complexe : gradient conjugué preconditionné ...quelques difficultés numériques...

On pose :

$$\begin{cases} X^\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + \dots, \\ P^\varepsilon = P^0 + \varepsilon P^1 + \dots, \\ u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots \end{cases}$$

Conditions pour avoir  $P^0 = 0$  ( $\Rightarrow$  contrôlabilité exacte !)

$${}^tBP^0 = 0, M\ddot{P}^0 - {}^tC\dot{P}^0 + {}^tKP^0 = 0, + \text{cond. finales.}$$

Si la matrice de contrôlabilité (Bellman [Th. Bellman](#)) est régulière alors  $P^0 \equiv 0$ . D'où :  $X^0(T) = \dot{X}^0(T) = 0$ .

**Ex.1** :  $N = 2$ ;  $M = I_d$ ,  $C = 0$   $K = \text{diag}(\xi_j)$ ,  ${}^tB = (1, 0)$  non contrôlable.

**Ex. 2** : idem mais  $C = {}^t(0, 1) \otimes (1, 0)$  contrôlable si  $\xi_j \neq 0$ . [Exercice](#)

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
L'optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$   
A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

### Condition nécessaire sur $P^1$

On introduit le champs virtuel  $Q$  de l'état adjoint à l'ordre 1 :

$$\forall \delta\Phi = (Q_0, Q_1) \in \mathbb{R}^{2N}$$
$$\text{et } Q(0) = Q_0, \dot{Q}(0) = Q_1, M\ddot{Q} - {}^tC\dot{Q} + {}^tKQ = 0.$$

On multiplie l'équation satisfaite par  $X^0$  par  $Q$  et on obtient :

$$\Lambda(\Phi, \delta\Phi) = \int_0^T (({}^tBP^1).({}^tBQ))_J = (MX_1 + CX_0.Q_0)_N - (X_0.Q_1)_N$$

La forme bilinéaire est clairement symétrique et définie positive (s'il y a contrôlabilité). Une fois  $P^1$  trouvé on a :  $u^0 = -{}^tBP^1$

### Remarque (Contrôle partiel)

*Si les matrices  $E$  et  $F$  ont des noyaux  $\neq \{0\}$  il faut remplacer les conditions initiales de  $P^1$  par des conditions finales.*

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

### Condition suffisante sur $P^1$

Inversement  $P^1$  et donc  $u^0$  sont tels que (calcul inverse sans utiliser  $X^0(T) = \dot{X}^0(T) = 0$ ) :

$$\forall \delta\Phi = (Q_0, Q_1) \in \mathbb{R}^{2N}$$

$$\text{et } Q \text{ solution de } M\ddot{Q} - {}^tC\dot{Q} + {}^tKQ = 0, \quad Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = Q_1,$$

on obtient :

$$([-M\dot{X}^0(T) + CX^0(T)] \cdot Q(T))_N + (MX^0(T) \cdot \dot{Q}(T))_N = 0.$$

Or l'application  $(Q_0, Q_1) \rightarrow (Q(T), \dot{Q}(T))$  est une bijection de  $\mathbb{R}^{2N}$  (preuve classique). D'où :

$$X^0(T) = \dot{X}^0(T) = 0.$$

Le contrôle ainsi caractérisé est donc bien exact.

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

$u^0 = -{}^tBP^1$  où  $P^1$  est solution d'une EDO à coefficients constants

Le terme  $P^1$  est donc  $\mathcal{C}^\infty([0, T])$ , ce qui est à la fois un avantage et un handicap ! En fait s'il y avait des bornes sur l'amplitude du contrôle, on aurait des pertes de régularité (contrôle *bang-bang*) qui s'assimile à des chocs. Nous étudions cet aspect plus loin.

### Compromis dans la cas avec contrainte

Supposons que le contrôle  $u = \{u_i\}$  doive vérifier :  $|u_i| \leq c_i$ . Une approche possible est de poser :

$$\tilde{u}^0 = \text{Proj}_{[-c_i, c_i]}(u^0).$$

Cependant cette possibilité ne fonctionne pas toujours dans le cas d'instabilités. Voir cours sur le non linéaire.

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie

Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

Notons  $\mathcal{U}_{ex}$  l'ensemble des contrôles exacts pour des conditions initiales données qui sont dans l'espace  $[L^2(]0, T[)]^J$ .

On remarque alors que si on note  $\tilde{X} = X(v) - X(u^0)$  (différence de deux solutions avec deux contrôles exacts :  $v \in \mathcal{U}_{ex}$  et  $u^0$  solution calculée précédemment), on obtient la suite de relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^T (v - u^0 \cdot u^0)_J &= - \int_0^T ({}^tBP^1 \cdot v - u^0)_J \\ &= \int_0^T (M\ddot{\tilde{X}} \cdot P^1)_N + (C\dot{\tilde{X}} \cdot P^1)_N + (K\tilde{X} \cdot P^1)_N = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $u^0$  est l'unique élément solution de :

$$\min_{v \in \mathcal{U}_{ex}} \int_0^T |v|^2.$$

## Cours 3: Contrôle des vibrations

### Position du problème

Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

### La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

### Cas des milieux continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$   
A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

### QCM 3

Puisque  $u^0$  est exact :

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq J^\varepsilon(u^0) = \frac{\varepsilon}{2} \|u^0\|_{]0, T[}^2,$$

mais aussi :

$$\|X^\varepsilon(T)\|_N^2 + \|\dot{X}^\varepsilon(T)\|_N^2 \leq \varepsilon \|u^0\|_{]0, T[}^2.$$

D'où :  $u^{\varepsilon'} \rightarrow u^*$  dans  $[L^2(]0, T[)]^J$ -faible,  $X^{\varepsilon'}(T) \rightarrow 0$ ,  $\dot{X}^{\varepsilon'}(T) \rightarrow 0$ .

$$\frac{\varepsilon'}{2} \|u^{\varepsilon'}\|_{]0, T[}^2 \leq J^{\varepsilon'}(u^{\varepsilon'}) \leq \frac{\varepsilon'}{2} \|u^0\|_{]0, T[}^2;$$

La semi-continuité inférieure des fonctions convexes  $\Rightarrow$

$\|u^*\|_{]0, T[}^2 \leq \|u^0\|_{]0, T[}^2$ , d'après Tychonov  $u^* = u^0 \Rightarrow$  toute la suite  $u^\varepsilon$  converge faiblement vers  $u^0$ . De :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{]0, T[}^2 = \int_0^T |u^\varepsilon|^2 - 2u^\varepsilon \cdot u^0 + |u^0|^2 \leq 2 \int_0^T u^0 \cdot (u^0 - u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
L'optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$   
A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

Pour concentrer à l'origine, on pose par exemple ( $\xi > 0$ ) :

$$J^\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \{ \|X(T)\|_{2N}^2 + \|\dot{X}(T)\|_{2N}^2 \} + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T e^{2\xi t} |v|^2.$$

On obtient :

$$u^0 = -({}^t B.P^1)e^{-2\xi t}$$

où  $P^1$  est solution de :

$$M\ddot{P}^1 - {}^t C\dot{P}^1 + {}^t K P^1 = 0, \quad P^1(0) = \Phi_0, \quad \dot{P}^1(0) = \Phi_1,$$

et  $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1) \in \mathbb{R}^{2N}$  est solution de l'équation de Gram avec cette fois :

$$\Lambda(\Phi, \delta\Phi) = \int_0^T e^{-2\xi t} ({}^t B P^1 \cdot {}^t B Q)_J,$$

avec  $Q$  solution de :

$$M\ddot{Q} - {}^t C\dot{Q} + {}^t K Q = 0, \quad Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q} = Q_1, \quad \delta\Phi = (Q_0, Q_1).$$

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complets  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

On considère le cas d'une équation scalaire :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = bu, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1.$$

Dans ce cas  $J = 1$ ,  $N = 1$ . La matrice  $G$  associée à la forme bilinéaire  $\Lambda$  et le vecteur second membre  $L$  sont :

$$G = \frac{T}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T} & \frac{1}{T\omega^2}(1 - \cos(2\omega T)) \\ \frac{1}{T\omega^2}(1 - \cos(2\omega T)) & \frac{1}{2\omega^2}(1 - \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T}) \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix}$$

Si  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  la matrice  $G$  est diagonale. Il faut aussi être prudent car le contrôle est à la fréquence de résonance.

On pourra regarder les résultats avec le petit programme matlab ci-joint pour différents choix de  $T$  : [Prog. matlab contrôle](#) [Quelques résultats](#)

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
L'optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

On reprend le modèle 1D :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1,$$

et on pose :

$$u = -c \operatorname{signe}(\dot{x}).$$

Le trajectoires sont des arcs d'ellipses qui aboutissent sur la segment de l'axe des  $x$  :  $[-\frac{c}{\omega^2}, \frac{c}{\omega^2}]$ . Pour permettre de se rapprocher de l'origine on peut diminuer  $c$  au cours du temps.

Par exemple :

$$c(t) = c_0 e^{-\xi t}$$

Prog. matlab Airbus

Quelques résultats

Avec décroissance de  $c$

# Prise en compte de contraintes sur le contrôle

Retour

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle couplé fluides-structures

QCM 3

On a posé :  $\mathcal{U}_{ad} = \{v \in [L^2(]0, T[)]^J, |u_k| \leq c_k\}$ , et :

$$\min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \frac{1}{2} \left[ |X(T)|^2 + |\dot{X}(T)|^2 + \varepsilon \int_0^T |v|^2 \right].$$

La relation d'optimalité est une inéquation :

$$u^\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \int_0^T ({}^tBP^\varepsilon + \varepsilon u^\varepsilon) \cdot (v - u^\varepsilon) \geq 0$$

où  $P^\varepsilon$  et  $X^\varepsilon$  sont toujours solution des mêmes équations. Or  $u^\varepsilon$  est bornée dans  $[L^2(]0, T[)]^J$  idem de  $X^\varepsilon$  et  $P^\varepsilon$ .  $\exists$  des sous-suites qui convergent vers  $u^*$ ,  $X^*$ ,  $P^*$ . Il y a deux cas (**on suppose contrôlable**) :

- 1 soit  $\exists u_{exact} \in \mathcal{U}_{ad}$  et  $u^*$  est le contrôle exact minimal dans  $\mathcal{U}_{ad}$
- 2 soit il n'existe pas de contrôle exact dans  $\mathcal{U}_{ad}$  et dans ce cas :

$$\text{presque tout } t, u^*(t) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} ({}^tBP^*(t) \cdot v)_J$$

Le contrôle est *bang-bang*. Le temps minimal correspond au basculement entre ces deux situations (exo).

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

### Le modèle support (J.L. Lions)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \Delta y = v \chi_{\mathcal{O}}, \quad y \in H_0^1(\Omega), \quad y(0, t) = y_0 \in V, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(0, t) = y_1 \in H.$$

On introduit le problème de contrôle optimal :

$$\min_{v \in L^2(\mathcal{O} \times ]0, T])} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} (y(x, T))^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t}(x, T) \right)^2 + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v^2(x, t) dx dt \right].$$

### Ce qu'il faut montrer :

La démarche est la même qu'en dimension finie, sauf sur un point (essentiel et difficile) : l'étude de  $\Lambda$ . On doit montrer que  $\sqrt{\Lambda(\cdot, \cdot)}$  définit une norme sur l'espace  $V \times H$  et caractériser  $\mathcal{V}$  qui est le complété de  $V \times H$  pour cette norme. Par dualité, on caractérise ensuite les conditions initiales  $(y_0, y_1)$  contrôlables.

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^1$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

On a dans l'exemple précédent :

$$\Lambda(\Phi, \Phi) = \int_0^T \int_\Omega |p^1|^2 dx dt \geq 0, \quad \frac{\partial^2 p^1}{\partial t^2} - c^2 \Delta p^1 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ p^1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times ]0, T[, \quad p^1(x, 0) = \Phi_0, \quad \dot{p}^1(x, 0) = \Phi_1 \text{ dans } \Omega.$$

On doit construire le complété de l'espace  $V \times H$  vis-à-vis de  $\Lambda$

C'est un problème difficile. JL Lions a donné une solution lorsque le contrôle porte sur la frontière de  $\Omega$  en utilisant un invariant énergétique proposé par C. Morawetz. Il y a un temps minimum de contrôle (2 fois le plus long rayon). On peut étendre... [Exemples](#)

Un exemple simple classique est celui d'une structure 1D (cordes, poutres...) où le contrôle est localisé sur un sous-ouvert  $]a, b[$ . Dans ce cas (corde) :

$$\mathcal{V}_\Lambda = L^2(]0, L]) \times H^{-1}(]0, L]).$$

Le contrôle exact est  $u^0 = -p^1 \chi_\Omega \in L^2(]a, b[ \times ]0, T])$  et on contrôle toutes données initiales  $(y_0, y_1) \in H_0^1(]0, L]) \times L^2(]0, L])$ . On peut prendre en compte des seconds membres.

# A propos des pastilles piezo-électriques

$\varepsilon \rightarrow 0$  Retour

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

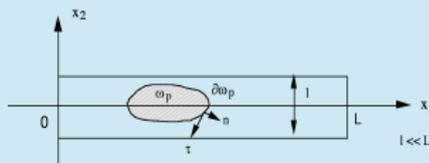
QCM 3

Description ; on utilise Euler-Bernoulli pour simplifier...

Un pastille piezoélectrique a un double fonctionnement. Une D.P. implique une déformation et réciproquement. Considérons une plaque mince sur laquelle on a collé une telle pastille sur laquelle on applique une tension électrique  $V$ . La flèche  $u(x, t)$  est solution de ( $h_{\alpha\beta}$  est le tenseur symétrique de piezoélectricité. Il est constant sur la pastille ;  $k$  est un coefficient fonction de l'épaisseur de la pastille :

$$2\varepsilon\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\Delta^2 u = k\partial_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}V\chi_{\omega_p}, \quad \varepsilon \omega + Cl + CL$$

La F.V. est alors :  $\forall v \in H_0^2(\omega)$



$$\int_{\omega} 2\varepsilon\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \int_{\omega} D\partial_{\alpha\beta}u\partial_{\alpha\beta}v = Vk \int_{\omega_p} h_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}v = Vk \int_{\partial\omega_p} h_{\alpha\beta}v_{,\alpha}\partial_{\beta}v.$$

# Différents montages de pastilles Retour

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas  
contrôlable  
Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane  
Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

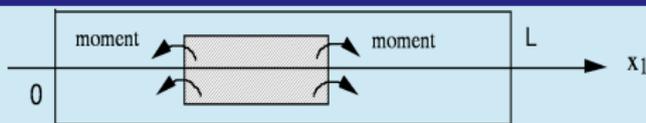
A propos des pastilles piezo  
Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

On se place dans le cas de piezo. mono-orienté :  $h_{\alpha\beta} = h_{11}\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}$ .  
Puis on note :  $x_2 = \pm f(x_1)$  l'équation de la forme de la pastille. On a :

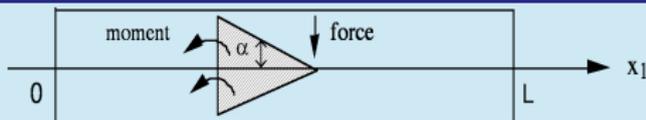
$$I(v) = \int_{\omega_p} h_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} v = 2h_{11} \int_a^b f(x_1) \partial_{11} v.$$

### La pastille rectangle



$$f = F, \quad I(v) = 2h_{11}F [\partial_1 v(b) - \partial_1 v(a)].$$

### La pastille triangle



$$f = F \frac{b - x_1^a}{b - a}, \quad I(v) = 2h_{11}F [v(b) - \partial_1 v(a)].$$

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux continus

Cas d'une membrane

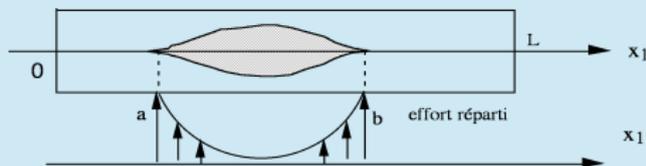
Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle couplé fluides-structures

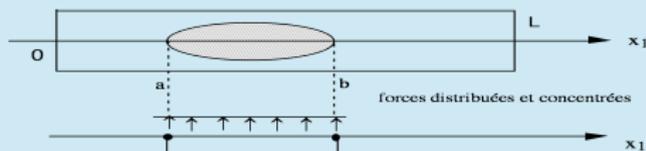
QCM 3

### La pastille ravioli



$$f = F(x_1 - a)^2(x_1 - b)^2, \quad l(v) = 4h_{11}F \int_a^b \left[ (x_1 - a)^2 + 4x_1(x_1 - a) + x_1^2 \right] v(x_1).$$

### La pastille amande



$$f = F(x_1 - a)(x_1 - b), \quad l(v) = 2h_{11}F \left[ \int_a^b 2v(x_1) - (b - a)(v(b) + v(a)) \right].$$

## Cours 3:

## Contrôle des vibrations

Position du problème

Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des développements asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^p$  dans le cas contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux continus

Cas d'une membrane

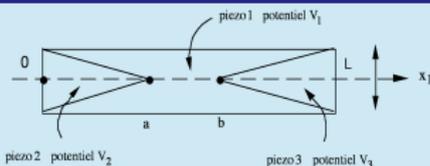
Caractérisation des complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle couplé fluides-structures

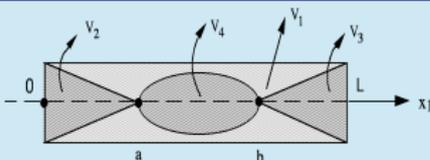
QCM 3

### La pastille papillon ( $a = b$ )



$$I(v) = -2h_{11}Fv(a).$$

### La pastille bonbon



$$I(v) = 4h_{11}F \int_a^b v(x_1).$$

### Remarque (Difficultés concernant la contrôlabilité)

*Papillon => contrôle est ponctuel au point  $x_1 = a$ . Si c'est un nœud d'un mode le contrôle n'agit pas possible.*

*Bonbon => les modes symétriques sur  $[a, b]$  ne sont pas contrôlés.*

*Combinaisons de toutes ces pastilles et avec des pastilles isotropes :*

$$h_{\alpha\beta} = h\delta_{\alpha\beta}.$$

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
L'optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complétés  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3

### Contrôle fluide-structure avec vitesse d'avance

On reprend le modèle à l'ordre 1 (perturbations) du cours 2 mais avec un contrôle de pilonnement avec vagues ; ( $V = H^1(\Omega)$  par exemple) :

$$M\ddot{z} + \varrho[|S| + g d_1]z + \varrho \int_{\Gamma_c} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] (\mathbf{e}_z \cdot \nu) = \varrho \frac{U^2}{2} A C_z(\alpha),$$
$$\forall \psi \in V, \frac{\varrho}{g} \int_{\Gamma_f} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] \psi + \varrho \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi =$$
$$\varrho \int_{\Gamma_c} \left[ \dot{z} (\mathbf{e}_z \cdot \nu) + z \frac{\partial (\mathbf{e}_z \cdot \nu)}{\partial x} \right] \psi.$$

Rappel sur le modèle

Prog

Visu

# Questionnaire d'assimilation [Retour](#)

## Cours 3: Contrôle des vibrations

Position du problème  
Cas de la dimension finie  
Optimalité sans contrainte

La méthode des  
développements  
asymptotiques *a priori*

Calcul de  $u^0$  dans le cas  
contrôlable

Cas avec contraintes

Cas des milieux  
continus

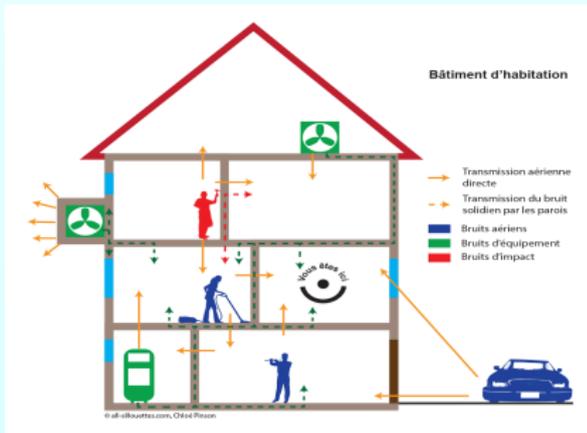
Cas d'une membrane

Caractérisation des  
complets  $\mathcal{V}_\Lambda$

A propos des pastilles piezo

Un problème de contrôle  
couplé fluides-structures

QCM 3



Répondez aux questions et  
vérifiez votre score.



Lancer le qcm

Un phare apporte la lumière et permet de se repérer dans une mer parfois très agitée et recouverte de brouillard.

Évitez de regarder les réponses trop vite !