Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Cours 5: Quelques outils fondamentaux

Henri Poincaré et Ivar Bendixson

PLAN DU COURS 5

1. La *toolbox*
   - A propos des EDOs
   - Notions de cycles limites (*limit cycle of oscillations*)
   - Le critère de Poincaré-Bendixson
   - Le critère de l'énergie
   - Le théorème de Poincaré-Bendixson
2. Recherche d'ensembles d'invariants
   - Multiplication par $\dot{x}$, puis $\alpha x + \beta \dot{x}$
   - Quelques simulations pour illustrer
3. QCM 5

A propos des EDOs Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(X, \dot{X}), \; X(0) = X_0, \; \dot{X}(0) = X_1, X(t) \in \mathbb{R}^N$$

Nous ferons pour ce cours 5, l' hypothèse suivante:

$$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R}^N).$$

Théorème (Cartan existence unicité d'une solution)

L'équation ci-dessus admet une solution unique pour tout temps fini (cette notion de temps fini est particulièrement importante comme nous le verrons dans la suite).

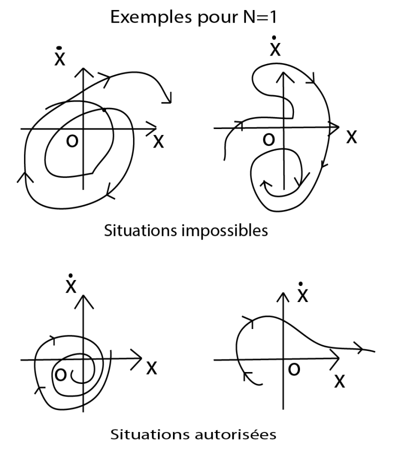
Corollaire (Une conséquence simple mais utile)

Le diagramme de phase (trajectoire dans l'espace $(X(t), \dot{X}(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$ ne peut pas avoir de point double en temps fini.

Diagramme de phase

Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.



Le résultat de Cartan a des conséquences pratiques pour localiser les trajectoires d'une solution de l'équation différentielle.

- On notera qu'il ne peut y avoir de croisement d'orbites en temps fini;
- Si $\dot{x} > 0 \;\; => \;\; x$ croit;
- On peut avoir une branche asymptotique au-dessus l'axe des x;

Cycle limite d'oscillation

Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Definition (Cycle limite de $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(X, \dot{X})$)

Soit $X(t),\ t > 0$ une solution de l'équation ci-dessus (sans condition initiale): $X(t),\ t > 0$ est un cycle limite si $\exists T \in \mathbb{R}^{+*}$ (la plus petite valeur de T est la période du cycle), telle que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+},\ X(t+T) = X(t).}$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^{2N}$ $t > 0 \to (X(t), \dot{X}(t))$ est alors une trajectoire fermée parcourue en un temps T. Si de plus:
$\exists t_0 \in]0, \infty]$ tel que: $\dot{X}(t_0) = \ddot{X}(t_0) = 0$, le cycle limite $(X(t),\ t > t_0)$ est un point d'équilibre (stable ou non) solution de: $KX = F(X, 0)$.

Cycle résonant

Visu Prog

En coordonnées polaires ($N = 1$):
$(x, \dot{x}) \to (r, \varphi)$
$\dot{r} = ar - br^3,\ \dot{\varphi} = \omega + cr^2$

Cycle de Van der Pol

Visu Prog.

$N = 1,\ \ddot{x} + 2\omega\varepsilon\dot{x}(x^2 - 1) + \omega^2 x = 0$
$(0, 0)$ est un équilibre instable.

Le critère de Poincaré-Bendixson

Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Soit l'équation (un éventuel amortissement est dans f et $N = 1$):

$$m\ddot{x} + kx = f(x, \dot{x}),\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1,\ x(t) \in \mathbb{R}^N.$$

Supposons que $x(t),\ t > 0$ soit un c.l. de l'équation ci-dessus. Le couple $(x(t), \dot{x}(t)),\ t > 0$ délimite dans le plan de coordonnées $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$, un ouvert connexe D de frontière ∂D et la normale unitaire sortante à D le long de ∂D est:

$$\nu = (\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \ddot{x}^2}}(-\ddot{x}, \dot{x}),\ \text{on a sur } \partial D:\ ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \ddot{x}^2}dt.$$

On pose $P = (0, f(x, \dot{x}))$ et on a sur ∂D:

$$(P, \nu)ds = f(x, \dot{x})\dot{x}dt = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}dt.$$

La formule de **Stokes** nous donne: Preuve:

$$\boxed{\int_D div(P)dxd\dot{x} = \int_D \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x})dxd\dot{x} = \int_{\partial D} f(x, \dot{x})\nu_2 ds = \int_0^T (m\ddot{x} + kx)\dot{x}dt = 0.}$$

Formulation du critère Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

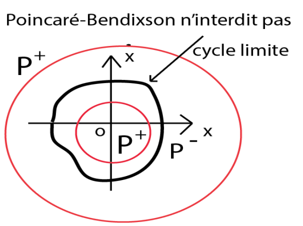
On introduit les deux ensembles (on rappelle que $N = 1$):

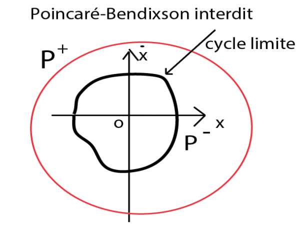
$$\boxed{P^+ = \{(x,\dot{x}) | \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x}) > 0\}, P^- = \{(x,\dot{x}) | \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x}) < 0\}.}$$

Soit $x(t),\ t > 0$ un cycle limite d'oscillations et notons D l'ouvert délimité par ce cycle dans le plan des phases $(x,\dot{x})$.

Lemme (Critère de Poincaré-Bendixson)

L'ouvert D ne peut pas être contenu ni dans P^+ ni dans P^-. Attention le critère porte sur l'ouvert D et non pas sur sa frontière ∂D.





Le critère de l'énergie Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

$x(t)$, $t > 0$ est encore un cycle limite dont l'orbite est ∂D et l'ouvert délimité est D; $(N = 1)$. On note que: Preuve:

$$0 = \int_0^T (m\ddot{x} + kx)\dot{x}dt = \int_0^T f(x,\dot{x})\dot{x}dt = \int_0^T \frac{f(x,\dot{x}) - f(x,0)}{\dot{x}}\dot{x}^2 dt.$$

Introduisons deux ouverts du plan des phases:

$$\boxed{E^+ = \{(x,\dot{x}) | \frac{f(x,\dot{x}) - f(x,0)}{\dot{x}} > 0\},\ E^- = \{(x,\dot{x}) | \frac{f(x,\dot{x}) - f(x,0)}{\dot{x}} < 0\}}$$

Lemme (Le critère de l'énergie (PhD-MTR))

L'orbite ∂D d'un cycle limte de l'équation:

$$m\ddot{x} + kx = f(x,\dot{x}),$$

ne peut pas être contenue ni dans E^+ ni dans E^-. En ce sens le critère de l'énergie est plus précis que celui de Poincaré-Bendixson.

Le théorème de Poincaré-Bendixson Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Cours 5: Quelques outils fondamentaux

Definition (Ensemble invariant par une EDO)

Soit $I \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, x_1) \in I$. Notons $x(t),\ t > 0$ la solution de

$$m\ddot{x} + kx = f(x, \dot{x}),\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1.$$

Si $\forall (x_0, x_1) \in I => \forall t > 0,\ (x(t), \dot{x}(t)) \in I$ alors I est dit invariant par l'EDO ci-dessus.

Théorème (Existence d'un cycle limite)

Supposons qu'il existe un ensemble I invariant par l'EDO qui soit compact (fermé borné). Alors, soit il existe un cycle limite dans I, soit il y a un point d'équilibre sur l'axe des x qui est éventuellement atteint en un temps infini.

(3 vidéos successives) *Preuve V1* *Preuve V2* *Preuve V3*

Bien que simple dans le contexte envisagé, cette preuve nécessite quelques précautions d'ordre mathématique.

Recherche d'ensembles d'invariants

Retour

Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

Donnons un exemple de recherche d'ensembles invariants avec: $f(x, \dot{x}) = p(x) + \dot{x}q(x)$, P, Q des primitives de p et q. On a: Preuve

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} - P\right) = \dot{x}^2 q(x),\\
&\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} - P - \dot{x}Q + \frac{Q^2}{2m}\right) = \frac{Q}{m}(kx - p),\\
&R^- = \{(x, \dot{x}) | q(x) \leq 0\} \text{ et } S^- = \{(x, \dot{x}) | Q(kx - p) \leq 0\}
\end{aligned}}$$

Lemme (Voir la vidéo ci-contre pour d'autres exemples (Autres invariants))

Supposons $\exists c_0 > 0$, $c_1 > 0$ *telle que les courbes du plan des phases:*

$$\boxed{\begin{aligned}
&H = \{(x, \dot{x}) | (m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} - P = c_0\}\\
&J = \{(x, \dot{x}) | m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} - P - \dot{x}Q + \frac{Q^2}{2m} = c_1\}.
\end{aligned}}$$

soient fermées et contenues dans R^- *(resp.* S^-*). Alors l'ensemble entouré par H (resp. J) est un ensemble invariant par l'EDO ...*

Application

Retour

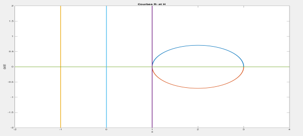
Le son est piloté depuis la barre en bas de l'écran.

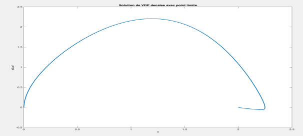
Choisissons (Van der Pol poussée vers la droite):

Tracé de l'orbite

$$q(x) = 1 - x^2 \Rightarrow Q(x) = x - \frac{x^3}{3} + c \text{ et } p(x) = 2k \Rightarrow P(x) = 2kx - 2k$$

On obtient pour R^- (à gauche) et orbite (à droite):



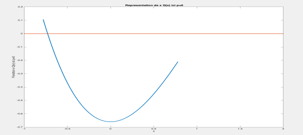


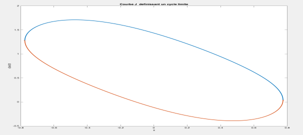
Choisissons (Van der Pol):

Construction de J

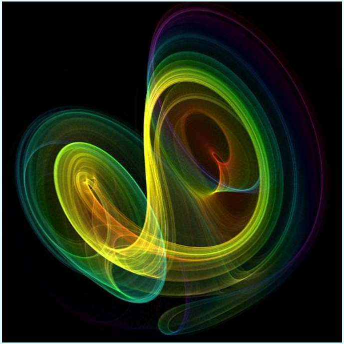
$$q(x) = 1 - x^2 \Rightarrow Q(x) = x - \frac{x^3}{3} + c_0 \text{ et } p(x) = 0 \Rightarrow P(x) = 0$$

On obtient pour S^- (à gauche) et J (à droite):





Questionnaire d'assimilation Retour



Portrait de phase pour $N = 3$ d'une EDO.

Répondez aux questions et vérifiez votre score.

Lancer le qcm

Evitez de regarder les réponses trop vite!